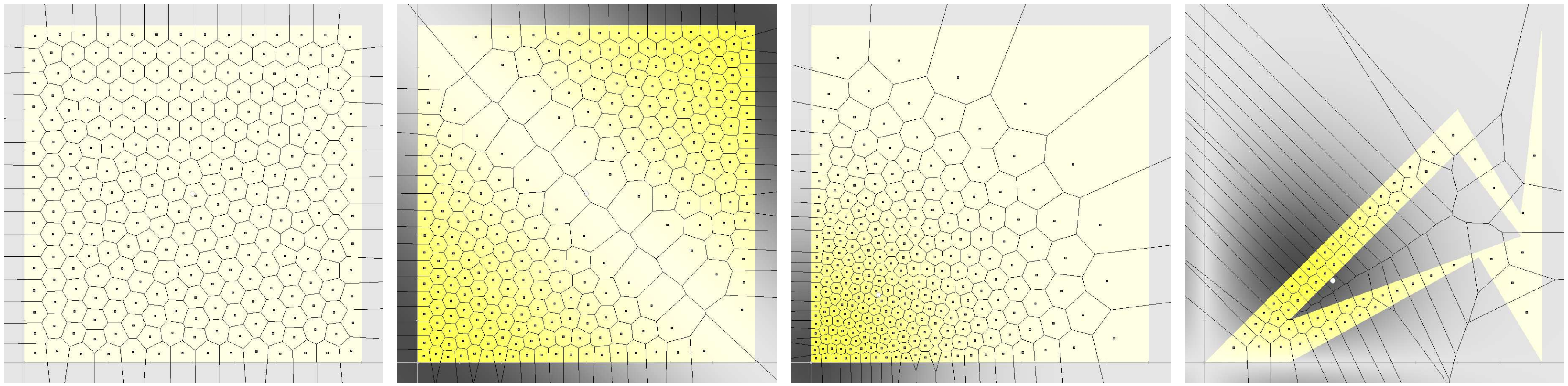
Schwerpunkt-Voronoi-Diagramme

Christian Raskob, fun@raskob.de, 28. Juni 2004



Übersicht

- Definition
- Minimalität
- Anwendung: Optimale Verteilung von Ressourcen
- Algorithmische Berechnung
- *Java*-Applet *CentroidalVoronoi*

Definition Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm

- Voronoi-Diagramm

- Voronoi-Punkte Schwerpunkt ihrer Voronoi-Region

Definition Voronoi-Diagramm

Seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^m$, $V_1, \dots, V_n \subset \mathbb{R}^m$.

1. V_i disjunkt
2. $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i = \mathbb{R}^m$
3. $V_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall j, i \neq j : \|x - z_i\| < \|x - z_j\|\}$

Dann ist $\mathcal{V} := \bigcup_{i=1}^{n} \partial V_i$ das *Voronoi-Diagramm* aus den *Voronoi-Punkten* $z_1, \dots, z_n$ und den *Voronoi-Regionen* $V_1, \dots, V_n$.

Definition Grundmenge und Dichtefunktion

Eine *Grundmenge* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist kompakt und hat polygonale Grenzen.

Eine *Dichtefunktion* $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion, die jedem Punkt der Grundmenge eine nichtnegative Dichte zuordnet.

Definition Schwerpunkt

Sei $V \subset R^m$ und ρ eine Dichtefunktion.

Dann ist z^* der *Schwerpunkt* von V, wenn folgendes gilt:

$$z^* = \frac{\displaystyle\int_V x\rho(x)\,dx}{\displaystyle\int_V \rho(x)\,dx}$$

Definition Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm

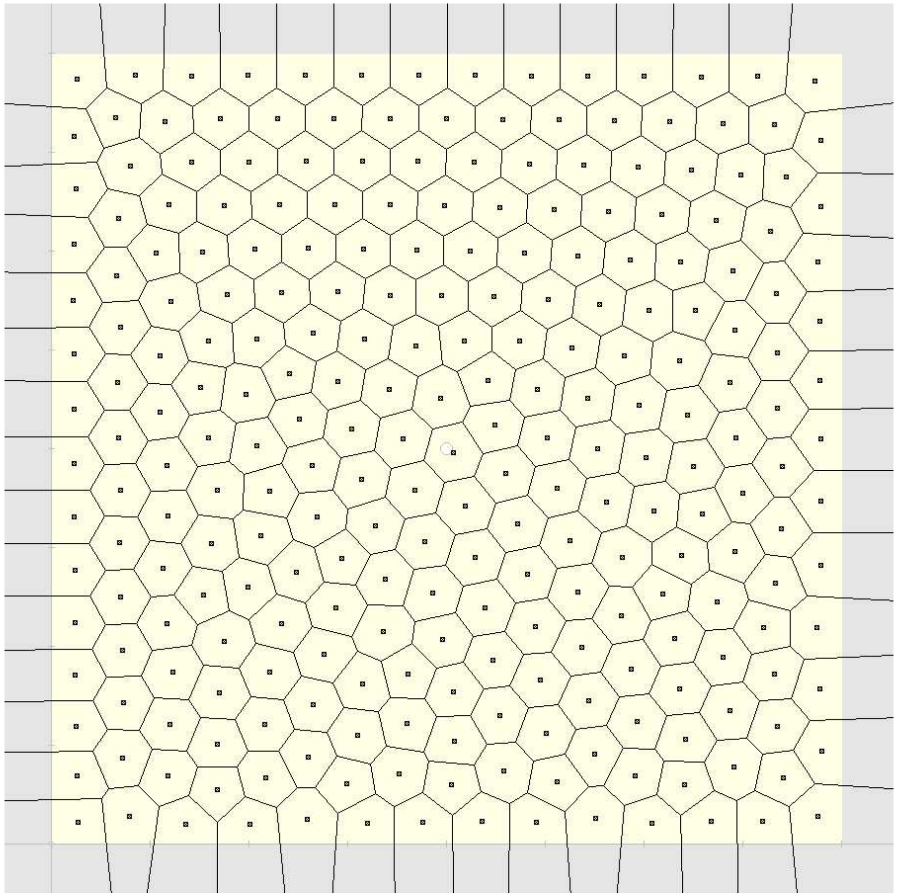
1. Sei $\{z_i\}_{i=1}^n$ mit $z_i \in \mathbb{R}^m$ und $n > 0$ eine Menge von Punkten.

   Seien weiterhin $\{V_i\}_{i=1}^n$ mit $V_i \subseteq \mathbb{R}^m$ die zugehörigen Voronoi-Regionen und $\mathcal{V}$ das resultierende Voronoi-Diagramm in $\mathbb{R}^m$.

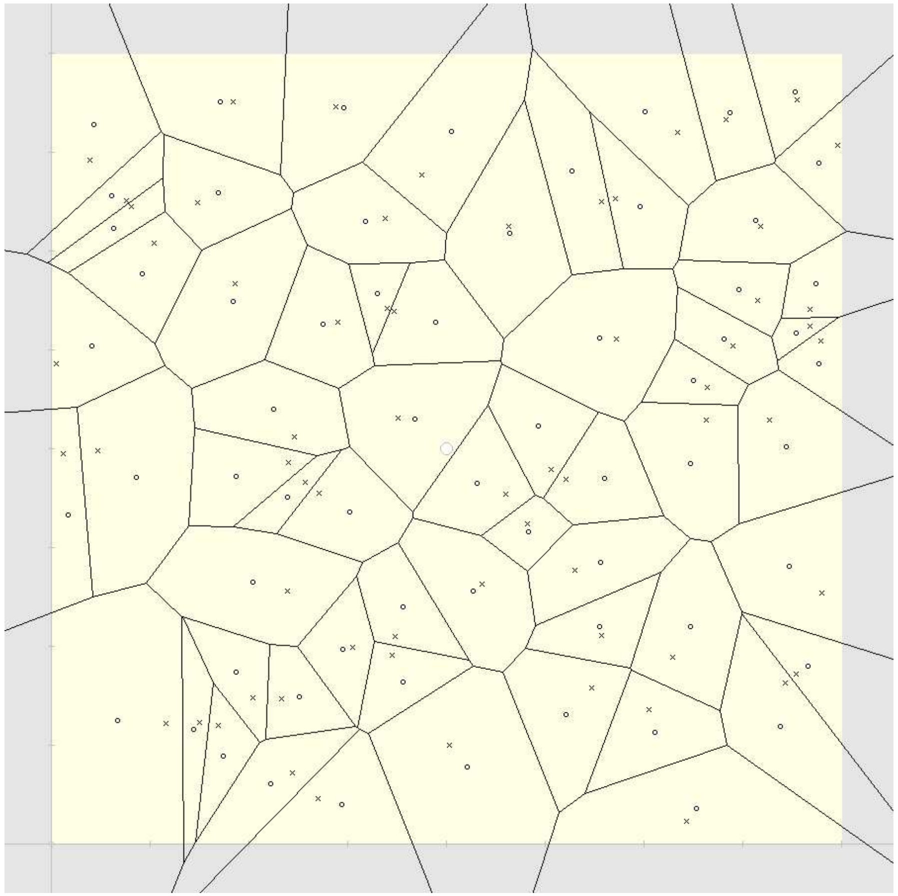
2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Grundmenge und $z_i^* \in V_i \cap \Omega$ der Schwerpunkt der zu z_i gehörigen und auf Ω beschränkten Voronoi-Region $V_i \cap \Omega$.

Wenn nun $z_i^* = z_i$ gilt, dann ist $\mathcal{V}$ ein *Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm*.

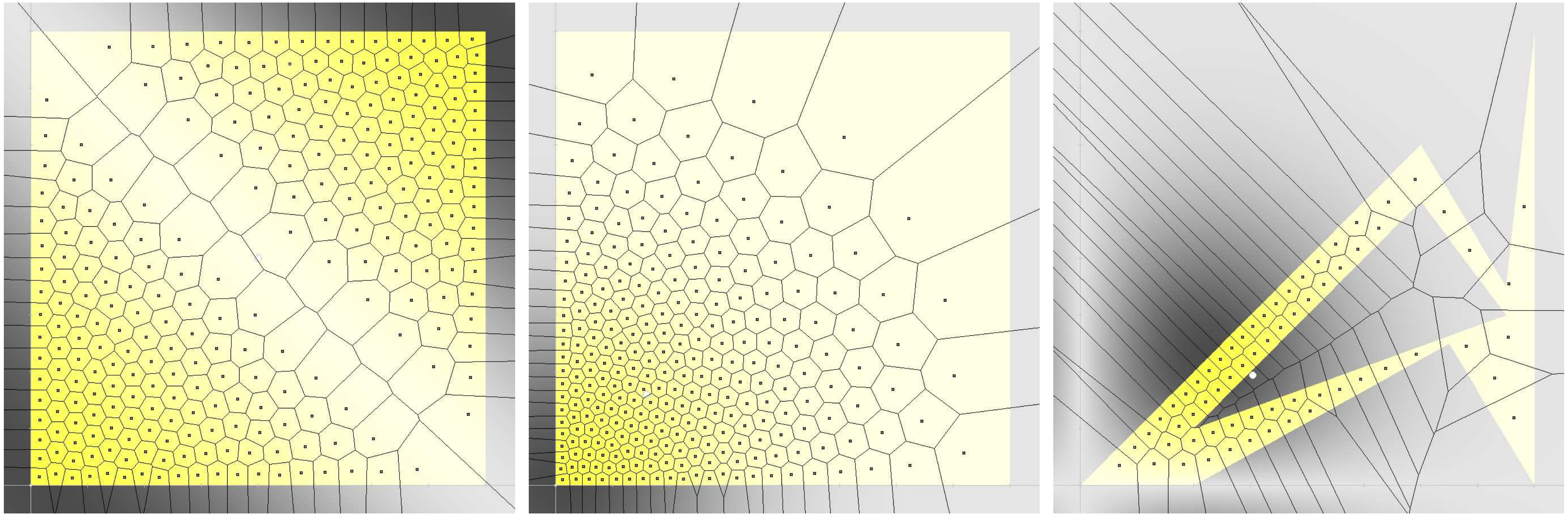
Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm mit 256 Voronoi-Punkten



Voronoi-Diagramm mit 256 Voronoi-Punkten



Weitere Schwerpunkt-Voronoi-Diagramme mit 256 Voronoi-Punkten



Minimalität

Das Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm mit den Voronoi-Punkten $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^m$ und den Voronoi-Regionen $V_1, \ldots, V_n \subset \mathbb{R}^m$ minimiert folgende Energiefunktion:

$$\mathcal{K}(z_1, \ldots, z_n) := \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \|x - z_i\|^2 \rho(x)\, dx$$

Doppelte Minimierung

1. Voronoi-Diagramm minimiert

2. Schwerpunkte minimieren

Nichteindeutigkeit

Das Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm ist in der Regel nicht eindeutig.

Konsequenz:

$\mathcal{K}$ minimal $\Rightarrow$ Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm.

Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm $\not\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ minimal.

Anwendung: Optimale Verteilung von Ressourcen

1. Eine bestimmte Ressource werde dann von einem Punkt genutzt, wenn sie näher zu ihm ist, als alle anderen Ressourcen.

2. Die Kosten, die durch die Benutzung der Ressource entstehen, seien abhängig vom quadratischen Abstand zur Ressource.

3. Optimal sei eine Ressourcenverteilung genau dann, wenn die Gesamtkosten unter Berücksichtigung einer Nutzungsdichte oder -häufigkeit minimiert werden.

Andere Anwendungen

- Daten-/Farbreduktion in Bildern
- Quantisierung
- Erzeugung hochwertiger Gitter

Algorithmische Berechnung

1. Determiniert: Lloyd-Algorithmus

2. Wahrscheinlichkeitsbasiert: k-Means-Algorithmus

Lloyd-Algorithmus

Näherung durch die wiederholte Anwendung folgender Schritte:

1. Berechne Schwerpunkte der Voronoi-Regionen!

2. Berechne Voronoi-Diagramm aus den Schwerpunkten!

Eigenschaften Lloyd-Algorithmus

- Determinierte Berechnung
- Konvergenz gegen Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm bei konvexer Grundmenge
- Hohe Konvergenzgeschwindigkeit, niedrige Iterationsgeschwindigkeit
- Schwierige Berechnung von Voronoi-Diagramm, Polygonschnitten und Schwerpunkten

k-Means-Algorithmus

Näherung durch eine wiederholte, zufällige Auswahl eines Punktes:

1. Wähle einen Punkt aus der Grundmenge!
2. Suche den nächstgelegenen Voronoi-Punkt!
3. Verschmelze Voronoi-Punkt und Zufallspunkt unter Berücksichtigung der Anzahl bisheriger Verschmelzungen des Voronoi-Punktes!

Eigenschaften k-Means-Algorithmus

- Wahrscheinlichkeitsbasierte Berechnung
- Fast sichere Konvergenz gegen Schwerpunkt-Voronoi-Diagramm bei konvexer Grundmenge
- Niedrige Konvergenzgeschwindigkeit, hohe Iterationsgeschwindigkeit
- Einfache Berechnung von Zufallspunkten

Offene Fragen

- Andere Metriken
- Bedingungen wie Hindernisse, Fixpunkte
- Hierarchien
- Andere Kostenfunktionen

Java-Applet CentroidalVoronoi

- Schwerpunkt-Voronoi-Diagramme interaktiv
- Lloyd-Algorithmus
- k-Means-Algorithmus mit Verbesserungen
- Erweiterbar um andere Dichtefunktionen